Wochenübungsblatt R6

10 - Quadratische Funktionen II

Aufgaben

1. Berechne jeweils die Normalform $y = ax^2 + bx + c$ der folgenden Parabeln p. Die beiden gegebenen Punkte A und B liegen dabei jeweils auf der Parabel.

   a) $a = 1$; $A(1|0)$ und $B(-1|2)$

   b) $a = -1$; $A(-1|0)$ und $B(1|2)$

   c) $a = 1,5$; $A(1|1)$ und $B(0|2)$

   d) $a = 2$; $A(1|2)$ und $B(-1|2,5)$

   e) $a = -\frac{1}{2}$; $A(3|0)$ und $B(-1|10)$

   f) $a = 12$; $A(-1|-3)$ und $B(3|3)$

2. Berechne jeweils die Normalform $y = ax^2 + bx + c$ der folgenden Parabeln p.

   a) p entsteht aus $q : y = 2x^2 - 4x + 5$ durch Verschiebung mit dem Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

   b) p entsteht aus $q : y = x^2 - x + 2$ durch Spiegelung an der Geraden $g : x = 3$

   c) p hat die Form $y = -x^2 - bx + 2b$ und geht durch den Punkt $A(1|2)$

   d) p hat die Form $y = -ax^2 - x + 1$ und geht durch den Punkt $A(-1|3)$

   e) p hat die Form $y = -x^2 - ax + 2b$ und geht durch die Punkte $A(1|2)$ und $B(3|5)$

   f) p hat die Form $y = -x^2 - ax + 2b$ und geht durch die Punkte $A(-1|3)$ und $B(3|-5)$

   g) p hat die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$ und Steigung 5

   h) p ist eine nach unten offene Normalparabel mit den Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$

Erklärung

Prinzipiell gilt: Ist von einer Funktionsgleichung die Form bekannt (z.B. Aufgabe 2c - 2f), dann muss man versuchen, die fehlenden Parameter herauszubekommen und zu ergänzen. Oft sind die fehlenden Parameter alle oder teilweise schon gegeben. Man kann deren Werte dann einfach einsetzen. Beispiel 1: Bei Aufgabe 2g und 2h sind von der in Linearfaktoren zerlegten Form alle Parameter gegeben. Also in $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ einfach die Steigung a und die Nullstellen x_1 und x_2 einsetzen. Will man - wie hier - die Normalform, muss man noch umformen (hier ausmultiplizieren).

Beispiel 2: Ist ein Punkt gegeben, der auf dem Funktionsgraphen liegt, dann kann man dessen x-Koordinate für x und seine y-Koordinate für y einsetzen. Manchmal hat dann die Funktionsgleichung nur noch einen unbekannten Parameter und man kann diesen durch Auflösen berechnen. In 2c und 2d kann man so b bzw. a berechnen.

Beispiel 3: Bleiben zwei unbekannte Parameter in der Funktionsgleichung übrig, dann kann man durch Auflösen nach einer von beiden nichts abschließend bestimmen. Hat man aber zwei Punkte auf dem Funktionsgraphen gegeben, so kann man durch Einsetzen wie in Beispiel 2 auch eine zweite Gleichung (mit zwei Unbekannten) aufstellen. Die Unbekannten kann man dann beide berechnen (siehe WOB: Lineare Gleichungssysteme). In allen Aufgaben 1a bis 1f und 2e und 2f führt dies zum Ziel. Setzt man z. B. in 1a Steigung und Punktkoordinaten in die Normalform ein, dann ergibt sich:

I. $0 = 1 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \iff$ I. $0 = 1 + b + c$
II. $2 = 1 \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \iff$ II. $2 = 1 - b + c \implies$

I. − II.: $-2 = 2b \implies b = -1 \implies c = 0 \implies y = x^2 - x$

Beispiel 4: Manchmal sind Parameter recht indirekt gegeben. In 2a lässt sich beispielsweise der Scheitel von q berechnen und verschieben. Damit ist der Scheitel von p bekannt. Da bei einer Verschiebung sich die Steigung der Parabel nicht ändert, kann man auch die Steigung von q übernehmen und hat in der Scheitelform $y = a(x - x_s)^2 + y_s$ alle fehlenden Parameter. Ebenso kann man in 2b verfahren, indem man den Scheitel von q spiegelt. Manchmal spricht man auch von einer nach oben offenen oder nach unten offenen Normalparabel. Dann ist indirekt die Steigung der Parabel gegeben. Im ersten Fall ist sie 1, im zweiten −1. Es sind dies die Parabeln, die Du mit der Schablone zeichnen kannst.

Lösungen

1. Berechne jeweils die Normalform $y = ax^2 + bx + c$ der folgenden Parabeln p. Die beiden gegebenen Punkte A und B liegen dabei jeweils auf der Parabel.

   a) $y = x^2 - x$
   b) $y = -x^2 + x + 2$
   c) $y = 1,5x^2 - 2,5x + 2$
   d) $y = 2x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$
   e) $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 9$
   f) $y = 12x^2 - 22,5x - 37,5$

2. Berechne jeweils die Normalform $y = ax^2 + bx + c$ der folgenden Parabeln p.

   a) $S(1|3)$ ist der Scheitel von q. Durch Verschiebung mittels $\overrightarrow{v}$ (Koordinaten addieren) erhält man den Scheitel $S'(4|5)$ von p. Da p dieselbe Steigung hat wie q (nämlich 2), erhält man die Scheitelform $2(x-4)^2+5$ und durch Umformung die Normalform $2x^2-16x+37$.

   b) $S(0,5|1,75)$ ist der Scheitel von q. Da g senkrecht im Punkt $x = 3$ ist, liegt das Spiegelbild von S bei $x = 5,5$ und auf derselben Höhe wie S, also $S'(5,5|1,75)$. Wie in 2a erhält man damit die Scheitelform $(x - 5,5)^2 + 1,75$ und Normalform $x^2 - 11x + 32$.

   c) $b = 3$ (s. Erklärungen) $\implies y = -x^2 - 3x + 6$

   d) $a = -1$ (s. Erklärungen) $\implies y = x^2 - x + 1$

   e) $a = -5,5$ und $b = -1,25$ (s. Erklärungen) $\implies y = -x^2 + 5,5x - 2,5$

   f) $a = 0$ und $b = 2$ (s. Erklärungen) $\implies y = -x^2 + 4$

   g) $y = 5 \cdot (x - 0)(x - 4) = 5x^2 - 20x$ (s. Erklärungen)

   h) $y = (-1) \cdot (x - (-1))(x - 3) = -x^2 + 2x + 3$ (s. Erklärungen)