

# 10 - Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck

## Aufgaben

1. Berechne alle fehlenden Größen (SsW)

a)  $\beta = 90^\circ$  ;  $a = 3\text{cm}$  ;  $b = 7\text{cm}$

b)  $\gamma = 90^\circ$  ;  $c = 10\text{cm}$  ;  $a = 9\text{cm}$

c)  $\alpha = 90^\circ$  ;  $b = 5\text{cm}$  ;  $a = 7\text{cm}$

d)  $\gamma = 90^\circ$  ;  $c = 10\text{cm}$  ;  $b = 9\text{cm}$

2. Berechne alle fehlenden Größen (SWS)

a)  $\beta = 90^\circ$  ;  $a = 3\text{cm}$  ;  $c = 4\text{cm}$

b)  $\gamma = 90^\circ$  ;  $b = 6\text{cm}$  ;  $a = 8\text{cm}$

c)  $\alpha = 90^\circ$  ;  $b = 10\text{cm}$  ;  $c = 12\text{cm}$

d)  $\gamma = 90^\circ$  ;  $a = 6\text{cm}$  ;  $b = 8\text{cm}$

3. Berechne alle fehlenden Größen (WSW, S=Kathete)

a)  $\beta = 90^\circ$  ;  $a = 7\text{cm}$  ;  $\gamma = 35^\circ$

b)  $\beta = 50^\circ$  ;  $b = 8\text{cm}$  ;  $\gamma = 90^\circ$

c)  $\beta = 40^\circ$  ;  $c = 7\text{cm}$  ;  $\alpha = 90^\circ$

d)  $\beta = 40^\circ$  ;  $b = 7\text{cm}$  ;  $\alpha = 90^\circ$

4. Berechne alle fehlenden Größen (WSW, S=Hypotenuse)

a)  $\beta = 90^\circ$  ;  $b = 10\text{cm}$  ;  $\gamma = 35^\circ$

b)  $\beta = 60^\circ$  ;  $c = 10\text{cm}$  ;  $\alpha = 30^\circ$

c)  $\gamma = 70^\circ$  ;  $a = 3\text{cm}$  ;  $\alpha = 90^\circ$

d)  $\beta = 30^\circ$  ;  $a = 10\text{cm}$  ;  $\alpha = 90^\circ$

## Erklärung

Bei Berechnungen am Dreieck gibt es prinzipiell 4 verschiedene Aufgabentypen: SSS, SWS, WSW, SsW. Im rechtwinkligen Dreieck fällt die Möglichkeit SSS weg, da ja der rechte Winkel gegeben ist, bleiben also nur die Fälle SWS, WSW, SsW. Dafür ist es in der WSW-Situation ein wesentlicher Unterschied, ob die gegebene Seite die Kathete oder die Hypotenuse ist. Die vier Aufgabentypen des Blattes decken also alle möglichen Aufgaben ab. **Andere gibt es nicht!**

Schau Dir zuerst die Kongruenzsätze aus der 8. Klasse an und löse die Aufgaben zuerst durch Zeichnung und Konstruktion. Du kannst dann die zu berechnenden Größen einfach abmessen. In den Abschlussprüfungen sind die Zeichnungen ohnehin immer zusätzlich zu den Berechnungen verlangt. Außerdem kann man durch Vergleich mit den Messergebnissen immer die Rechnung kontrollieren und braucht eigentlich gar keine Lösungen zum Kontrollieren! Schließlich ist die Zeichnung die beste Übung für eine skizzierte Planfigur, die man auch dann braucht, wenn die Konstruktion nicht verlangt ist, denn man muss ja wissen, wie die gegebenen Größen im Dreieck liegen, um seine Rechnung zu planen.

Bei Berechnungen gibt es in rechtwinkligen Dreiecken immer 3 Argumente:

1. Zwei Winkel sind gegeben. Der dritte Winkel wird durch die Winkelsumme ergänzt.
2. Zwei Seiten sind gegeben. Die dritte Seite wird mit Hilfe des Pythagoras ergänzt.
3. Aus einem Winkel wird durch die trigonometrischen Funktionen eine fehlende Seite berechnet oder umgekehrt.

Beispiele:

**Aufgabe 4d:**  $\beta$  und  $\alpha$  sind zusammen  $130^\circ$ . Alle Winkel zusammen sind immer  $180^\circ$ , also bleibt für  $\gamma = 50^\circ$  übrig.

**Aufgabe 2a:** Hier sind die Katheten gegeben, die fehlende Hypotenuse  $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

**Aufgabe 1a:** Kathete und Hypotenuse sind gegeben, die fehlende Kathete  $c = \sqrt{7^2 - 3^2} \approx 6,32$

Prüfe immer zuerst die obigen Argumente, da sie wesentlich einfacher und schneller gerechnet sind, als  $\tan$ ,  $\sin$  und  $\cos$ . Die Musterlösungen sind auch in dieser Reihenfolge gerechnet. Ist Dir der Unterschied zwischen 2a und 1a nicht klar, wiederhole unbedingt den Pythagoras! Alle Aufgaben kann man grundsätzlich mit allen drei Winkelfunktionen rechnen. Es ist aber ratsam, ein Gespür dafür zu bekommen, welche der drei Varianten die einfachste ist. Die Aufgabentypen 1, 2 und 3 sind am einfachsten mit dem Tangens zu rechnen. Aufgabentyp 4 am einfachsten mit dem Sinus oder Cosinus:

**Aufgabe 1a:**  $\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{3}{7} \Rightarrow \alpha \approx 23,20$

Rechne auf dem Taschenrechner 3 geteilt durch 7 (= Taste!), dann INV-Tangens.

**Aufgabe 3a:**  $\tan(\gamma) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \Rightarrow \tan(35^\circ) = \frac{c}{7} \Rightarrow c = 7 \cdot \tan(35^\circ) \approx 4,90$

**Aufgabe 4a:**  $\sin(\gamma) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \Rightarrow \sin(35^\circ) = \frac{c}{10} \Rightarrow c = 10 \cdot \sin(35^\circ) \approx 5,74$

## Lösungen

- Berechne alle fehlenden Größen (SsW). Das erste Ergebnis bekommt man mit Pythagoras, die beiden anderen z.B. mit  $\tan$ . Wären nur die Winkel gefragt (nicht die fehlende Seite), wäre  $\sin$ ,  $\cos$  der direktere Weg! Ebenso bei Aufgabe 2.
  - $c \approx 6,32\text{cm}$ ;  $\alpha \approx 25,38^\circ$ ;  $\gamma \approx 64,62^\circ$
  - $b \approx 4,36\text{cm}$ ;  $\alpha \approx 64,16^\circ$ ;  $\beta \approx 25,84^\circ$
  - $c \approx 4,90\text{cm}$ ;  $\beta \approx 45,58^\circ$ ;  $\gamma \approx 44,42^\circ$
  - Aufgabe 1b gespiegelt!
- Berechne alle fehlenden Größen (SWS)
  - $b = 5\text{cm}$ ;  $\alpha \approx 36,87^\circ$ ;  $\gamma \approx 53,13^\circ$
  - $c = 10\text{cm}$ ;  $\alpha \approx 53,13^\circ$ ;  $\beta \approx 36,87^\circ$
  - $a \approx 15,62\text{cm}$ ;  $\beta \approx 39,81^\circ$ ;  $\gamma \approx 50,19^\circ$
  - Aufgabe 2b gespiegelt!
- Berechne alle fehlenden Größen (WSW, S=Kathete). Das erste Ergebnis bekommt man durch die Winkelsumme, dann zweimal  $\tan$ .
  - $\alpha = 55^\circ$ ;  $c \approx 4,90\text{cm}$ ;  $b \approx 8,54\text{cm}$
  - $\alpha = 40^\circ$ ;  $a \approx 6,71\text{cm}$ ;  $c \approx 10,44\text{cm}$
  - $\gamma = 50^\circ$ ;  $b \approx 5,87\text{cm}$ ;  $a \approx 9,14\text{cm}$
  - Aufgabe 3c gespiegelt!
- Berechne alle fehlenden Größen (WSW, S=Hypotenuse). Das erste Ergebnis bekommt man durch die Winkelsumme, dann zweimal  $\sin$  oder  $\cos$ .
  - $\alpha = 55^\circ$ ;  $a \approx 8,19\text{cm}$ ;  $c \approx 5,74\text{cm}$
  - $\gamma = 90^\circ$ ;  $a = 5\text{cm}$ ;  $b \approx 8,66\text{cm}$
  - $\beta = 20^\circ$ ;  $b \approx 1,03\text{cm}$ ;  $c \approx 2,82\text{cm}$
  - Aufgabe 4b gedreht!